

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW-005

Schema Theorie Matrixfuncties

N.G. de Bruijn



1955

April 1955

Schematische Theorie Matrixfuncties

door

N.G. de Bruijn.

- Def. 1. MR_n = ruimte van alle complexe $n \times n$ matrices. Gebruikelijke topologie:
 $MR_n^* =$ verz. der niet-singuliere matrices uit MR_n .
- Def. 2. $A \in MR_n$ heet diagonaal (notatie $A = [\alpha_1, \dots, \alpha_n]$) als in de hoofd-diagonaal $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ staan, en daerbuiten nullen. De eenheidsmatrix is aangeduid door I .
- Def. 3. A heet triangulair als onder de hoofddiagonaal slechts nullen staan.
 A heet supertriangulair als ook de hoofddiagonaal nul is.
- Def. 4. Als $\nu_1 + \dots + \nu_s = n$ een partitie van n is, dan zeggen wij dat A het type $(\nu_1, \dots, \nu_s)$ heeft, wanneer A s verschillende eigenwaarden heeft, resp. met multipliciteiten $\nu_1, \dots, \nu_s$. In het symbool $(\nu_1, \dots, \nu_s)$ is de volgorde der ν 's irrelevant.
 Zijn α en β typen, dan heet $\alpha < \beta$ als α uit β ontstaat door hier en daar ν 's samen te nemen: b.v. $(2, 2, 3) < (2, 1, 1, 1, 2)$.
 Wij gebruiken ook het symbool $\leq$.
- Def. 5. A heet niet-critiek, als A het type $(1, 1, \dots, 1)$ heeft (d.w.z. alle eigenwaarden verschillend). In alle andere gevallen heet A critiek.
- Def. 6. Is $A \in MR_n$, $X \in MR_n^*$, dan is A^X gedefinieerd door $X^{-1}AX$. Dus $(A^X)^Y = A^{XY}$.
- St. 1. Is A niet-critiek, dan volgt uit $A^X = A^Y$, dat $X = DY$, waarin D diagonaal en niet-singulier is, en omgekeerd. Is A critiek dan zijn er niet-diagonale matrices X met $A^X = A$.
- Def. 7. Zij G een gebied in MR_n . $A_1 \in G$ en $A_2 \in G$ heten geconjugueerd in G , als er een continue afb. van $[0, 1]$ in MR_n^* bestaat (aangeduid door $X(t)$), zó dat

$$A_1^{X(t)} \in G \quad (0 \leq t \leq 1), \quad A_1^{X(0)} = A_1, \quad A_1^{X(1)} = A_2.$$
- Def. 8. Een polynoom is een functie van de matrixvariabele Z , gegeven door een formule van de vorm:

$$P(Z) = c_0 I + c_1 Z + \dots + c_N Z^N,$$
 waarin de c 's scalair en constant zijn.

Def. 9. Zij G een gebied in MR_n , F een matrixfunctie op G (d.i. een afb. van G in MR_n). F heet sterk analytisch in G , als er een rij polynomen $\{P_k(Z)\}$ is die in elk compact deel van G uniform naar F convergeert.

Def. 10. F heet analytisch in G , als er bij elk punt van G een omgeving is waarin F sterk analytisch is. F heet analytisch in A , als F analytisch is in een omgeving van A .

St. 2. G en H gebieden van MR_n . F_1 en F_2 analytisch in G resp. H . Verder wordt G door F_1 in H afgebeeld. Dan is $F_2(F_1(Z))$ analytisch in G .

St. 3. A_1 en A_2 geconjugerd in G , $X(t)$ de functie uit def. 7. F analytisch in G . Dan is

$$F(A_2) = F(A_1)^{X(1)}.$$

St. 4. $P(Z)$ polynoom, dan $P(A) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{P(\lambda)}{\lambda I - A} d\lambda$,

waarbij in positieve zin om alle eigenwaarden van A heen wordt geïntegreerd.

St. 5. A eigenwaarden $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ met multipliciteiten $v_1, \dots, v_s$. Zij F analytisch in A . Dan is er een open verzameling S in het complexe vlak, die $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ bevat, en daarin een analytische functie f , zodanig dat voor alle Z in een zekere omgeving van A geldt

$$(1) \quad F(Z) = \sum_{j=1}^s \frac{1}{2\pi i} \int_{W_j} \frac{f(\lambda)}{\lambda I - Z} d\lambda \quad (W_j = \text{kring om } \lambda_j).$$

De functie $f(\lambda)$ is in zekere omgevingen van $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ eenduidig bepaald. Is $P_k(Z) \rightsquigarrow F(Z)$ in een omgeving van A , dan is ook $P_k(\lambda) \rightsquigarrow f(\lambda)$ in zekere omgevingen van $\lambda_1, \dots, \lambda_s$.

Is Z voldoende dicht bij A , en is

$$Z = ([\zeta_1, \dots, \zeta_s] + K)^X \quad (K \text{ superdiagonaal}),$$

dan is

$$F(Z) = ([f(\zeta_1), \dots, f(\zeta_s)] + K_1)^X \quad (K_1 \text{ superdiagonaal}).$$

Opm.: f is analytisch in elk deelgebied van S , doch deze verschillende functietakken behoeven niet analytisch samen te hangen.

St. 6. $\frac{1}{\lambda_0 I - Z}$ is een analytische functie van Z voor alle Z waarvan λ_0 geen eigenwaarde is.

St. 7. $G_1, \dots, G_s$ disjuncte gebieden in complexe vlak $f(\lambda)$ analytisch in elk dezer G_j . Laat $\mathcal{K}(G_1^{v_1}, \dots, G_s^{v_s})$ de collectie zijn van alle matrices die v_j eigenwaarden in G_j hebben ($j = 1, \dots, s$). Definieer de functie $F(Z)$ in $\mathcal{K}$ door (1) (st. 5; voor elke j loopt W_j nu in G_j om de in G_j gelegen eigenwaarden van Z) Dan is $F(Z)$ analytisch in $\mathcal{K}$.

Is $A \in \mathcal{K}$, en $A = ([\alpha_1, \dots, \alpha_n] + N)^X$, waarin N nilpotent is en verwisselbaar met $[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$, dan is

$$F(A) = \sum_{j=0}^{n-1} [f^{(j)}(\alpha_1), \dots, f^{(j)}(\alpha_n)] N^j / j!$$

St. 8. Is $F(Z)$ analytisch in een gebied, dan is daar

$$F(Z) = c_0(Z)I + c_1(Z)Z + \dots + c_{n-1}(Z)Z^{n-1},$$

waarin de c 's niet-constante scalaires zijn.

Het type van $F(Z)$ is $\leq$ het type van Z .

Def. 11. Block in MR_n . Laat gegeven zijn n disjuncte gebieden $G_1, \dots, G_n$ in complexe vlak, en een samenhangend deel C van MR_n^* . Dan heet de verzameling $\mathcal{B}(G_1, \dots, G_n; C)$, bestaande uit alle

$$[\lambda_1, \dots, \lambda_n]^X \quad (\lambda_1 \in G_1, \dots, \lambda_n \in G_n, X \in C)$$

een block. De open verzameling $S(\mathcal{B}) = G_1 + \dots + G_n$ heet het spectrum van het block.

St. 9. Is het block $\mathcal{B}$ gegeven, dan is $S(\mathcal{B})$ eenduidig bepaald. Bij elke rangschikking $G_1, \dots, G_n$ van de samenhangende componenten van $S(\mathcal{B})$ is een C te vinden, zó dat $\mathcal{B} = \mathcal{B}(G_1, \dots, G_n; C)$. Bij elke $A \in \mathcal{B}$ is dan de X vastgelegd op een diagonale linksfactor na (st. 1); deze kan, daar C samenhangend moet zijn, echter niet overal willekeurig gekozen worden.

St. 10. Elk block is een gebied in MR_n .

St. 11. $A \in MR_n$, O omgeving van A , A niet-critiek. Dan is er een block $\mathcal{B}$ met $A \in \mathcal{B} \subset O$.

St. 12. Zijn $\mathcal{B}_1$ en $\mathcal{B}_2$ blocks, en ligt A in hun doorsnede, dan bevat die doorsnede ook een block dat A bevat (de doorsnede behoeft zelf geen block te zijn).

St. 13. Laat $\mathcal{B}$ een block zijn in MR_n , en laat F analytisch zijn in $\mathcal{B}$. Dan is er een in $S(\mathcal{B})$ eenduidig bepaalde analytische functie f zó dat voor elke $A \in \mathcal{B}$ geldt, dat bij elke representatie

$$A = [\lambda_1, \dots, \lambda_n]^X$$

geldt $F(A) = [f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_n)]^X$.

F en f bepalen elkaar eenduidig.

St. 14. Laat F het block $\mathcal{B}$ uit MR_n éénéénzijdig afbeelden op de verzameling $\mathcal{B}'$ van MR_n . Dan is $\mathcal{B}'$ een block (uit 2^e deel van st. 1 volgt dat $\mathcal{B}'$ geen critieke punten bevat); de inverse afbeelding F_1 is analytisch in $\mathcal{B}'$. De volgens st. 13 bij F behorende functie f beeldt $S(\mathcal{B})$ conform af op $S(\mathcal{B}')$. De bij F_1 behorende functie f_1 is de inverse van f .

Def. 12. Een analytic matrix manifold (MM) is een samenhangende Hausdorff-ruimte M met een klasse van gelijkwaardige systemen van uniformiserende parameters. Een uniformiserende parameter is een topologische afbeelding van een gebied van M op een gebied van MR_n . Een systeem van uniformiserende parameters is een dusdanige collectie, dat 1^e elk punt van M in het definitiegebied van minstens één uniformiserende parameter ligt, en 2^e zijn de uniformiserende parameters φ en ψ beide in P gedefinieerd, dan is er een in een omgeving van $\varphi(P)$ gedefinieerde analytische functie F zó dat $F(\varphi(Q)) = \psi(Q)$ voor alle Q in een omgeving van P . Twee systemen heten gelijkwaardig als ze samen weer een systeem vormen.

Een in een gebied G van M gedefinieerde afbeelding F van G in MR_n heet analytisch als er bij elke $P \in G$ een uniformiserende parameter φ is, gedefinieerd in een omgeving van P en gekozen uit één der gegeven systemen, zó dat in een omgeving van Q $F(Q)$ een analytische functie van $\varphi(Q)$ is.

St. 15. Zij Σ een verzameling. Bij elke $\sigma \in \Sigma$ zij gegeven een gebied G_σ uit MR_n . In de collectie van alle paren (G_σ, A) ($\sigma \in \Sigma$, $A \in G_\sigma$) zij een equivalentierelatie gegeven, die voldoet aan de volgende eigenschappen:

1. reflexief, symmetrisch, transitief.
2. Is $(G_\sigma, A) \sim (G_\tau, A_1)$, dan is er een omgeving O ($A \in O \subset G_\sigma$) en daarop een analytische functie F , zó dat voor alle $B \in O$ geldt $(G_\sigma, B) \sim (G_\tau, F(B))$, terwijl $F(A) = A_1$.
3. Uit $(G_\sigma, A) \sim (G_\sigma, B)$ volgt $A = B$.
- 4a. Is (G_σ, A) niet equivalent met (G_τ, A_1) , dan zijn er omgevingen O en O_1 ($A \in O \subset G_\sigma$; $A_1 \in O_1 \subset G_\tau$) zo dat voor alle $B \in O$, $B_1 \in O_1$ geldt dat (G_σ, B) en (G_τ, B_1) niet equivalent zijn.
- 4b. (gelijkwaardig met 4a) Is $\sigma \in \Sigma$, $\tau \in \Sigma$, en is een rij $A, A_1, A_2, \dots$ van punten uit G_σ gegeven en een rij $B, B_1, B_2, \dots$ uit G_τ , zó dat $(G_\sigma, A_k) \sim (G_\tau, B_k)$ ($k = 1, 2, \dots$) en is $A_k \rightarrow A$, $B_k \rightarrow B$, dan is ook $(G_\sigma, A) \sim (G_\tau, B)$.
5. Zijn (G_σ, A) en (G_τ, B) paren uit de collectie, dan zijn er rijen $\sigma = \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m = \tau$ (alle uit Σ), $A = A_0, A_1, \dots, A_m$ ($A_j \in G_{\sigma_j}$), $B_0, \dots, B_m = B$ ($B_j \in G_{\sigma_j}$) met $(G_{\sigma_{j-1}}, B_{j-1}) \sim (G_{\sigma_j}, A_j)$ ($j = 1, \dots, m$).

Laat M de collectie zijn van alle klassen van equivalente paren. Een deel M_1 van M heet open als er bij elk punt van M_1 een paar (G_σ, A) uit de door dat punt aangewezen klasse is te vinden, zó dat er een omgeving O ($A \in O \subset G_\sigma$) bestaat met de eigenschap dat alle klassen (G_σ, B) ($B \in O$) eveneens tot M behoren. Kies als een systeem van uniformiserende parameters de afbeeldingen $\varphi_\sigma(\sigma \in \Sigma)$, gedefinieerd door

$$\varphi_\sigma \{(G_\sigma, A)\} = A \quad (A \in G_\sigma).$$

Bewering: M is, met het hier aangegeven systeem, een analytisch matrix manifold.

- St.16. Is G een gebied in MR_n , dan is het slechts uit de identieke afbeelding bestaande systeem een systeem van uniformiserende parameters, en G is daarbij een MM.
- Def.13. Zijn M en M_1 beide MM's, en is er een éénéénduidige afbeelding zó dat elke uniformiserende parameter op M analytisch is op M_1 en elke uniformiserende parameter op M_1 analytisch is op M , dan heten M en M_1 isomorph.
- Def.14. Een afbeelding van M in M_1 heet homeomorph, als elke uniformiserende parameter van M_1 een analytische functie op M is.
- Opmerking. Het is niet noodzakelijk, dat hierbij open verzamelingen in open verzamelingen overgaan. Voorbeeld: $M=M_1=MR_n$, $F(A)=A^2-A$. De matrices $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ treden voor geen enkele a als beeld op.
- St.17. Is M een MM, en $P \in M$, φ en ψ uniformiserende parameters in P , dan hebben $\varphi(P)$ en $\psi(P)$ hetzelfde type (St.8). Is $\varphi(P)$ diagonaal resp. triangulair, symmetrisch, dan $\psi(P)$ ook.
- Def.15. Type van een punt P van M = type van $\varphi(P)$.
 P heet kritiek resp. diagonaal, triangulair, symmetrisch, als $\varphi(P)$ dat is.
- St.18. De verzameling der niet-critieke punten van een MM is open en overal dicht.
- Def.16. Een samenhangend deel $\mathcal{F}$ van een MM heet een fiber, als er bij elke $P \in \mathcal{F}$ een omgeving O van P is met daarop een uniformiserende parameter φ , zó dat $Q_1 \in (\mathcal{F} \cap O)$, $Q_2 \in (\mathcal{F} \cap O) \Rightarrow \varphi(Q_1)$ en $\varphi(Q_2)$ geconjugéerd in $\varphi(\mathcal{F})$.
 De definitie is onafhankelijk van de keuze van φ (zie St.3).
- Def.17. Een verzameling $\mathcal{B} \subset M$ heet een block als er een analytische functie op $\mathcal{B}$ is, die $\mathcal{B}$ éénéénduidig op een block van MR_n afbeeldt.
- St.19. Block op M bevat geen critieke punten. Elk niet-critiek punt is bevat in een block. Hebben de blocks $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ een punt P ge-

meen, dan is er een block $\mathcal{B} \ni P$ dat in de doorsnede ligt. Is een block $\mathcal{B} \in \mathcal{M}$ éénéénduidig analytisch afgebeeld op een block $\mathcal{B}'$ van MR_n , dan is elk deelblok van $\mathcal{B}'$ het beeld van een deelblok van $\mathcal{B}$.

St.20. Zijn P en Q niet critieke punten in een gebied G van M , dan is er een continue kromme van P naar Q , die in G verloopt en geen critieke punten bevat.

Def.18. M^- is datgene wat uit M ontstaat door de critieke punten weg te nemen, en de uniformiserende parameters tot de niet-critieke punten te beperken.

St.21. M^- is een samenhangend open deel van M , en dus weer een MM.

Def.19. Spectral manifold van M^- .

Zij Σ een verzameling; kies bij elke $\sigma \in \Sigma$ een block $\mathcal{B}_\sigma$ uit M^- , zó dat M^- door deze blocks geheel wordt overdekt. Verder kiezen we bij elke $\mathcal{B}_\sigma$ een éénéénduidige afbeelding φ_σ van $\mathcal{B}_\sigma$ op een block $\mathcal{B}'_\sigma$ van MR_n . $S(\mathcal{B}'_\sigma)$, het spectrum van $\mathcal{B}'_\sigma$, korten we af tot V_σ .

Beschouw de collectie van alle paren (V_σ, z) ($\sigma \in \Sigma, z \in V_\sigma$). Definieer equivalentie

$$(V_\sigma, z) \sim (V_\tau, w),$$

zodra er een punt $P \in M$ is met $P \in \mathcal{B}_\sigma, P \in \mathcal{B}_\tau$, z en w eigenwaarden van $\varphi_\sigma(P)$ resp. $\varphi_\tau(P)$, terwijl $w=f(z)$. Hierbij is f de functie die volgens St.5 (of St.13) met F correspondeert, een F is de in een omgeving van $\varphi_\sigma(P)$ analytische functie die voldoet aan $F(\varphi_\sigma(Q)) = \varphi_\tau(Q)$ (Q in omgeving van P).

Noem nu een klasse van equivalente paren een punt van SM, definieer omgevingen en uniformiserende parameters als in St.15 (pas St.15 toe met $n=1$). Zo ontstaat een analytic manifold, i.h.a. niet samenhangend (aan de 5e eis van St.15 is niet steeds voldaan).

St.22. SM is onafhankelijk van de keuze der $\mathcal{B}_\sigma$'s en der φ_σ 's.

Def.20. Bij elke $P \in M^-$ behoort een verzameling van n punten van SM (n.l. de klassen gerepresenteerd door (V_σ, z_j) , waarin $z_1, \dots, z_n$ de eigenwaarden van $\varphi_\sigma(P)$ zijn). Deze n punten vormen het z.g. spectrum van P .

St.23. Er zijn getallen $\nu_1, \dots, \nu_s$ ($\nu_1 + \dots + \nu_s = n$) met de volgende eigenschap: SM bestaat uit s samenhangende delen $S_1, \dots, S_s$. Voor elke $P \in M^-$ bestaat het spectrum uit ν_1 punten van S_1 , ν_2 punten van $S_2, \dots$.

Def.21. Zijn $u_1, \dots, u_n$ onbepaalden, is $\pi(1), \dots, \pi(n)$ een permutatie van $1, \dots, n$, en is $X \in MR_n^*$, dan heet $[u_{\pi(1)}, \dots, u_{\pi(n)}]^X$ een normaalvormsymbool.

Twee met dezelfde u's gevormde symbolen heten equivalent:

$$[u_{\pi(1)}, \dots, u_{\pi(n)}]^X \sim [u_{\xi(1)}, \dots, u_{\xi(n)}]^Y$$

als $XY^{-1} = DR$, waarin D diagonaal is en R de permutatiematrix gedefinieerd door $r_{ij} = \delta_{i, \sigma(j)}$, waar $\sigma = \pi^{-1} \xi$. M.a.w., als in het geval dat de u's verschillende complexe getallen zijn, de hierboven aangeduide matrices identiek zijn.

Def.22. Is $P \in M^-$, $\sigma \in \Sigma$ (zie Def.19), $z_1, \dots, z_n$ een rangschikking van het spectrum van $\varphi_\sigma(P)$, en zijn $P_1, \dots, P_n$ de respectievelijk door $(V_\sigma, z_1), \dots, (V_\sigma, z_n)$ gerepresenteerde punten van M^- , en is $\varphi_\sigma(P) = [z_1, \dots, z_n]^X$, dan heet $[P_1, \dots, P_n]^X$ een normaalvorm van P.

St.24. Alle normaalvormen van P zijn onderling equivalent.

St.25. Is F analytisch op de gehele M^- , dan is er een analytische functie f op de SM van M^- , zó dat voor elk punt P van M^- geldt

$$[P_1, \dots, P_n]^X \text{ normaalvorm van P} \Rightarrow F(P) = [f(P_1), \dots, f(P_n)]^X.$$

Def.23. $(v_1, \dots, v_s)$ heet het type van M. Het symbool $S_1^{v_1} \dots S_s^{v_s}$ heet de spectral manifold van M (volgorde irrelevant).

Def.24. Laat S een (niet noodzakelijk samenhangende) complex manifold zijn. We definiëren nu het (niet noodzakelijk samenhangend) MM dat door S wordt voorgebracht, en dat door $M(S)$ wordt aangegeven.

Beschouw een collectie $\{K_\sigma\}$ ($\sigma \in \Sigma$) van open verzamelingen op S, zodanig dat elke K_σ conform in het z-vlak kan worden afgebeeld, en zó dat elk n-tal punten van S in minstens een K_σ is bevat. (De existentie van deze K_σ 's blijkt als volgt:

Zijn $u_1, \dots, u_n$ disjuncte gebieden van S, die alle op begrensde gebieden van het z-vlak conform kunnen worden afgebeeld, dan kan hun vereniging conform op een stel disjuncte gebieden worden afgebeeld). Bij elke K_σ is een conforme afbeelding φ_σ gekozen; $\varphi_\sigma(K_\sigma) = L_\sigma$. De inverse afbeelding heet η_σ . Zij $\mathcal{K}_\sigma$ de verzameling van alle matrices waarvan het spectrum tot L_σ behoort. $\mathcal{K}_\sigma$ valt uiteen in samenhangende componenten $\mathcal{K}_\sigma^{(1)}, \mathcal{K}_\sigma^{(2)}, \dots$

Beschouw nu alle paren $(\mathcal{K}_\sigma^{(i)}, A)$ ($\sigma \in \Sigma, A \in \mathcal{K}_\sigma^{(i)}$). We noemen $(\mathcal{K}_\sigma^{(i)}, A)$ en $(\mathcal{K}_\tau^{(j)}, B)$ equivalent als

$$1^\circ \quad \eta_\sigma(S(A)) \in (K_\sigma \cap K_\tau), \quad \eta_\tau(S(B)) \in (K_\sigma \cap K_\tau)$$

2^o $B = F(A)$, als F de matrixfunctie is die (vgl. St.5) met de scalarfunctie $f(z) = \varphi_\tau(\eta_\sigma(z))$ correspondeert ($f(z)$ is gedefinieerd in $\varphi_\sigma(K_\sigma \cap K_\tau)$).

Deze equivalentierelatie voldoet aan de eisen van St.15 (behalve 5^o). Het resultaat is een niet-samenhangend MM, dat we

$M(S)$ noemen.

St.26. $M(S)$ is onafhankelijk van de keuze der ω 's.

St.27. $M(S)$ valt uiteen in samenhangende componenten, elk corresponderende met een mogelijkheid om de componenten van S te waarderen met gehele getallen $v \geq 0$ met som n .

Def.25. $M(S_1^{v_1}, \dots, S_s^{v_s})$ is de component die met de aangegeven waardering correspondeert.

St.28. De spectral manifold van $\{M(S_1^{v_1} \dots S_s^{v_s})\}^-$ is $S_1^{v_1} \dots S_s^{v_s}$.

St.29. Is M een MM, $S_1^{v_1} \dots S_s^{v_s}$ het spectral manifold van M^- , en M_1 het MM uit Def.24, dan is er een analytische afbeelding van M^- in M_1 , zó dat origineel en beeld steeds equivalente normaalvormen hebben.

Is F analytisch in M , dan is F ook analytisch in het corresponderende gebied van M_1 ; punten van M die op eenzelfde punt van M_1 worden afgebeeld, hebben gelijke waarden van F .

St.30. $A \in MR_n$. Dan is er een omgeving $O_1 \ni A$ zó dat voor elke samenhangende omgeving O ($A \in O \subset O_1$) het spectrale oppervlak van O^- hetzelfde type heeft als A .

St.31. De afbeelding van st.29 kan tot een afbeelding van M in M_1 worden voortgezet.

St.32. Zijn M_1 en M_2 beide MM's en is F een analytische afbeelding van M_1 in M_2 , dan correspondeert daarmee een analytische afbeelding f van S_1 in S_2 ($S_1 = SM$ van M_1). F en f bepalen elkaar éénduidig.

St.33. Is F analytisch op M , en f de corresponderende functie op S (S het SM van f), en zijn $P_1, \dots, P_n$ de punten van S die met het punt P van M corresponderen, dan zijn $f(P_1), \dots, f(P_n)$ de eigenwaarden van $F(P)$.

Def.26. Matrix bol = $M(S^n)$, als S de complexe bol voorstelt.

Def.27. Zij M een MM. Analytische afbeeldingen van M in de $M(S^n)$ heten meromorfe functies op M .

St.34. Met elke meromorfe functie op M correspondeert éénéénduidig een meromorfe functie op zijn SM.

St.35. Is M een MM, en convergeert een rij functies f_k uniform in elk compact deel van de SM, dan convergeren de corresponderende functies F_k uniform in elk compact deel van M .